Master 280 - Mido : 1 Juillet 2016
Pierre Brugière [1]: Risque de Crédit 1h30 corrigé

Exercice 1:
1) Que signifie CDO ? Collateralized Debt Obligation
2) Que signifie CLO ? Collateralized Loan Obligation
3) Que signifie CDS ? Credit Default Swap
4) On considère un CDO formé de 30 bonds de probabilité de défaut pour chaque bond égale à 5% et de corrélation de défaut entre eux égale à ρ. Toutes choses étant égales par ailleurs que se passe-t-il en général si ρ augmente:
a) pour le prix de la tranche senior ? - augmente
b) pour le prix de la tranche junior ? - diminue
c) pour le prix de la tranche mezzanine ? - dépend
5) Qu'est-ce que le $Z - score$ de Altman ? Un score pour prédire le risque de défaut avec comme inputs des ratios financiers de la société considérée
6) Qu'appelle-t-on un modèle structurel en risque de crédit ? Un modèle pour lequel le défaut résulte du montant du passif dépassant la valeur de l'actif
7) Que représente la "Distance to Default"? Un écart entre la dette et la valeur des actifs, renormalisée par la volatilité de l'actif
7) Qu'appelle-t-on le modèle KMV ? Le modèle structurel de Kealhofer, McQuown et Vasicek utilisé par Moody's pour prévoir le risque de défaut
8) Quelle est la différence entre un "Reduced Form Model" et un "Structural Model" en risque de crédit ? Le "Reduced form Model" est un modèle où l'on modélise directement l'intensité du processus de défaut
9) Comment crée-t-on de la corrélation entre les évènements de défaut dans un modèle d'intensité ? En utilisant des processus d'intensité corrélés
10) A quel moment le défaut se produit-t-il dans un processus de Cox ? Lorsque l'intégrale du processus d'intensité dépasse la réalisation d'une loi exponentielle de paramètre 1.
11) Quel est l'intérêt des processus de Cox ? d'avoir un processus d'intensité stochastique et donc de pouvoir créer de la corrélation entre les processus de défaut qui sinon, conditionnellement à la connaissance du processus d'intensité sont indépendants
12) Ecrire la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda(t)$. $F(s) = 1 - \int_0^{+\infty} exp(-\lambda(t))dt$
13) Quelles relations les études de Duffie & Co trouvent-elles entre les paramètres d'intensité historiques et implicites de défaut ? Dans les cas qu'ils ont étudiés l'intensité implicite était le double de l'intensité historique.
14) Comment fonctionne un modèle de contagion ? Le défaut peut être intrinsèque avec une probabilité p ou venir avec une probabilité q d'un autre

[1]Pierre Brugière Université Paris 9 Dauphine

défaut intrinsèque.
15) Qu'est-ce que le "Diversity Score" ? Le nombre d'actifs indépendants qui donneraient la même espérance et variance de perte
16) Que veut dire "EDF" et qui l'utilise en risque de crédit ? "Expected Default Frequency", Moody's.
17) Comment peut-on approximer le spread s à partir de l'intensité risque neutre de défaut λ et du recovery rate R ? $s = \lambda(1 - R)$
18) Pour calibrer des prix de marchés de CDS allez-vous plutôt utiliser un modèle structurel ou à forme réduite ? pourquoi ? A intensité car plus de flexibilité pour calibrer
19) Qu'est-ce qu'une copule ? Une fonction de répartition de n-uplet de lois uniformes sur $[0, 1]$
20) Qu'a-t-il été reproché aux copules utilisées par le marché en 2008 ? De mal modéliser la corrélation des évènements extrêmes.

Problème :

On considère n entreprises dont les valeur des actifs V^i évoluent suivant les équations: $dV_t^i = rV_t^i dt + \sigma_i V_t^i dB_t^i$ avec $B_t^i = \rho B_t^0 + \sqrt{1-\rho^2}W_t^i$ où les W_t^i et B_t^0 sont des Browniens indépendants et $\rho \in]-1,1[$. Dans le modèle on fait l'hypothèse que à l'instant T l'entreprise i fera défaut sur sa dette D^i si et seulement si $V_T^i < D^i$.

1) Démontrer que $E[B_t^i] = 0$ et $Var[B_t^i] = t$.
trivial par linéarité et indépendance.

2) Que représente ρ dans le modèle ?
La corrélation entre les Browniens B_t^i

3) Ecrire l'expression de V_t^i en fonction de V_0^i, r, σ_i et B_t^i.
$V_t^i = V_0^i exp(rt) exp(\sigma_i B_t^i - \frac{\sigma_i^2}{2}t)$

Soit Z^i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'entreprise i fait défaut sur sa dette D^i à l'instant T et qui vaut zéro sinon.

4) Comment appelle-t'on une variable aléatoire du type de la variable aléatoire Z^i ?
Une variable aléatoire de Bernouilli.

5) Ecrire l'expression de $E[Z^i/B_T^0 = x]$ sous la forme: $\Phi\left(-\frac{c^i+\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$
où Φ est la fonction de répartition d'une loi normale $N(0,1)$. Que vaut c^i ?

$E[Z^i/B_T^0 = x] = P(Z^i = 1/B_T^0 = x)$
$= P\left(V_0^i exp(rT) exp(\sigma_i B_T^i - \frac{\sigma_i^2}{2}T) < D^i/B_T^0 = x\right)$
$= P\left(\sigma_i B_T^i - \frac{\sigma_i^2}{2}T < ln\left(\frac{D^i}{V_0^i}\right) - rT/B_T^0 = x\right)$
$= P\left(\sigma_i B_T^i < \left[ln\left(\frac{D^i}{V_0^i}\right) - (r - \frac{\sigma_i^2}{2})T\right]/B_T^0 = x\right)$
$= P\left(\rho x + \sqrt{1-\rho^2}W_T^i < \frac{1}{\sigma_i}\left[ln\left(\frac{D^i}{V_0^i}\right) - (r - \frac{\sigma_i^2}{2})T\right]/B_T^0 = x\right)$
$= P\left(\sqrt{1-\rho^2}W_T^i < \left[\frac{1}{\sigma_i}\left[ln\left(\frac{D^i}{V_0^i}\right) - (r - \frac{\sigma_i^2}{2})T\right] - \rho x\right]\right)$
$= P\left(\frac{1}{\sqrt{T}}W_t^i < \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\frac{1}{\sqrt{T}}\left[\frac{1}{\sigma_i}\left[-ln\left(\frac{V_0^i}{D^i}\right) - (r - \frac{\sigma_i^2}{2})T\right] - \rho x\right]\right)$
$= P\left(\frac{1}{\sqrt{T}}W_t^i < \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[\frac{1}{\sigma_i\sqrt{T}}\left[-ln\left(\frac{V_0^i}{D^i}\right) - (r - \frac{\sigma_i^2}{2})T\right] - \rho\frac{x}{\sqrt{T}}\right]\right)$
$= P\left(\frac{1}{\sqrt{T}}W_T^i < \frac{-1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[\frac{1}{\sigma_i\sqrt{T}}\left[ln\left(\frac{V_0^i}{D^i}\right) + (r - \frac{\sigma_i^2}{2})T\right] + \rho\frac{x}{\sqrt{T}}\right]\right)$

Si on pose $\alpha_i = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{T}}\left[ln\left(\frac{V_0^i}{D^i}\right) + (r - \frac{\sigma_i^2}{2})T\right]$ comme $\frac{1}{\sqrt{T}}W_T^i \sim N(0,1)$ on obtient $\Phi(-\frac{\alpha_i+\rho\frac{x}{\sqrt{T}}}{\sqrt{1-\rho^2}})$ ou encore $\Phi(-\frac{c_i+\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}})$ avec $c_i = \alpha_i + \rho x\left[\frac{1}{\sqrt{T}} - 1\right]$

On suppose désormais que toutes les c^i sont égales et valent c et on note $p(x)$ la quantité $E[Z^i/B_T^0 = x]$.

6) Calculer $E\left[p(B_T^0)\right]$, que l'on note $\bar{p}$, en fonction de Φ, c et ρ.

$E\left[p(B_T^0)\right] = E\left[E[Z^i/B_T^0]\right] = E[Z^i] = P(V_T^i < D^i)$
$= P(V_0^i exp(rT)exp(\sigma_i B_T^i - \frac{\sigma_i^2}{2}T) < D^i)$
$= P(V_0^i exp(rT)exp(\sigma_i W_T^i - \frac{\sigma_i^2}{2}T) < D^i)$ car B_T^i et W_T^i ont même loi.
or cette expression correspond à l'expression calculée précédemment dans le cas $\rho = 0$ et vaut donc $\Phi(-\alpha_i)$
Comme $\rho = 0$ $\alpha_i = c_i = c$ et donc $\bar{p} = \Phi(-c)$
CQFD

7) Pour tout $u \in [0,1]$ écrire l'expression de $P\left(p(B_T^0) < u\right)$, que l'on note $F_{p(B_T^0)}(u)$, en fonction de Φ, Φ^{-1}, $\bar{p}$, u, ρ.
CQFD

$P\left(p(B_T^0) < u\right) = P\left(\Phi\left(-\frac{\alpha_i + \rho\frac{B_T^0}{\sqrt{T}}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) < u\right)$
$P\left(-\frac{B_T^0}{\sqrt{T}} < \frac{1}{\rho}\left[\sqrt{1-\rho^2}\Phi^{-1}(u) + \alpha_i\right)\right]$
or $-\frac{B_T^0}{\sqrt{T}} \sim N(0,1)$ et $\alpha_i = c$ et $\bar{p} = \Phi(-c) \Rightarrow \alpha_i = -\Phi^{-1}(\bar{p})$
donc $P\left(p(B_T^0) < u\right) = \Phi\left(\frac{1}{\rho}\left[\sqrt{1-\rho^2}\Phi^{-1}(u) - \Phi^{-1}(\bar{p})\right]\right)$

8) Montrer que $correl(Z^1, Z^2) = \frac{var\left(p(B_T^0)\right)}{\bar{p}(1-\bar{p})}$.

les Z^i sont des lois des Bernouilli de paramètre $p(B_T^0)$ conditionnellement à B_T^0 et sont indépendantes conditionnellement à B_T^0 donc
$E[Z^1 Z^2] = E\left[E[Z^1 Z^2/B_T^0]\right] = E\left[E[Z^1/B_T^0]E[E[Z^2/B_T^0]\right] = E\left[p(B_T^0)^2\right]$
et $E[Z^1] = E\left[E[Z^1/B_T^0]\right] = E\left[p(B_T^0)\right]$ donc
$cov(Z^1, Z^2) = E[Z^1 Z^2] - E[Z^1]E[Z^2] = E\left[p(B_T^0)^2\right] - E\left[p(B_T^0)\right]^2 = var\left(p(B_T^0)\right)$
D'autre part comme le paramètre de Bernouilli des Z^i est $= E\left[p(B_T^0)\right] = \bar{p}$ leur variance est $\bar{p}(1-\bar{p})$ d'où l'expression de la corrélation.

On pose $F_n(u) = P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} Z^i < u\right)$.

8) Montrer que pour tout $u \in [0,1]$ $F_n(u) \longrightarrow F_{p(B_T^0)}(u)$.

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} Z^i < u\right) = \lim_{n\to+\infty} E\left(1_{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} Z^i < u}\right) = \lim_{n\to+\infty} E\left(E\left(1_{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} Z^i < u}/B_T^0\right)\right)$$

or conditionnellement à B_T^0 les Z_i sont indépendantes et donc d'après la loi des grands nombres $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} Z^i \to p(B_T^0)$ donc la limite vaut $E\left(E\left(1_{p(B_T^0)<u}/B_T^0\right)\right)$

$E\left(1_{p(B_T^0)<u}\right) = F_{p(B_T^0)}(u)$ CQFD

On considère maintenant une banque qui détient un grand nombre de bonds D^i à son actif et l'on suppose que tous ces bonds ont des charactéristiques similaires et présentent entre eux les même corrélations de défaut $\rho(Z_i, Z_j)$.

11) Comment à partir du modèle précédent calculeriez vous une Var 99% pour le portefeuille ?

On est donc dans le cas du modèle étudié ici et on peut identifier le ρ correspondant en résolvant $\frac{var\left(p(B_T^0)\right)}{\bar{p}(1-\bar{p})} = \rho(Z_i, Z_j)$

La Var 99% du portefeuille exprimé en %, noté γ, de la valeur du portefeuille vérifie donc: $P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} Z^i < \gamma\right) = 99\%$ ou encore $F_n(\gamma) = 99\%$

Comme on suppose n grand on résoud en fait $F_{p(B_T^0)}(\gamma) = 99\%$

$\iff \Phi\left(\frac{1}{\rho}\left[\sqrt{1-\rho^2}\Phi^{-1}(\gamma) - \Phi^{-1}(\bar{p})\right]\right) = 99\%$

$\iff \gamma = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}[\rho\Phi^{-1}(99\%) + \Phi^{-1}(\bar{p})]\right)$